PART3　3次関数の決定（極値の条件から）

例題

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $x=-1$ で極大値をとり，$x=3$ で極小値 -28 をとるように，定数 a，b，c の値を定めよ。また，極大値を求めよ。

Point Pickup

練習

3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極大値 6 をとり，$x=2$ で極小値 5 をとるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

第15講　PART3 確認問題

1 3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=-1$ で極大値32をとり，$x=3$ で極小値 -32 をとるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

$a=$ [ア]，$b=$ [イウ]，$c=$ [エオカ]，

$d=$ [キク]

PART3　3 次関数の決定（極値の条件から）

例題

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $x=-1$ で極大値をとり，$x=3$ で極小値 -28 をとるように，定数 a，b，c の値を定めよ。また，極大値を求めよ。

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ より　$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x=-1$ で極大値をとるから　$f'(-1)=0$

よって

$3-2a+b=0$ …… ①

$x=3$ で極小値 -28 をとるから　$f'(3)=0$，$f(3)=-28$

よって

$27+6a+b=0$ …… ②

$27+9a+3b+c=-28$ …… ③

①，②，③より　$a=-3$，$b=-9$，$c=-1$

また，このとき

$f(x)=x^3-3x^2-9x-1$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになり，確かに $x=-1$ で極大値をとり，$x=3$ で極小値 -28 をとる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小 -28	↗

したがって　$a=-3$，$b=-9$，$c=-1$

極大値は　$f(-1)=4$

練習

3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極大値6をとり，$x=2$ で極小値5をとるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ より　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=1$ で極大値6をとるから　$f'(1)=0$，$f(1)=6$

よって

$3a+2b+c=0$ …… ①

$a+b+c+d=6$ …… ②

$x=2$ で極小値5をとるから　$f'(2)=0$，$f(2)=5$

よって

$12a+4b+c=0$ …… ③

$8a+4b+2c+d=5$ …… ④

④－②より　$7a+3b+c=-1$ …… ⑤

①，③，⑤より　$a=2$，$b=-9$，$c=12$

これと②より　$d=1$

また，このとき

$f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになり，確かに $x=1$ で極大値6をとり，$x=2$ で極小値5をとる。

したがって　$a=2$，$b=-9$，$c=12$，$d=1$

x	…	1	…	2	…
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	極大 6	↘	極小 5	↗

第15講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イウ：-6，エオカ：-18，キク：22

[解説]

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ より

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$x=-1$ で極大値 32 をとるから

$$f'(-1)=0,\ f(-1)=32 \quad \text{[A]}$$

よって

$$3a-2b+c=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$-a+b-c+d=32 \quad \cdots\cdots②$$

$x=3$ で極小値 -32 をとるから

$$f'(3)=0,\ f(3)=-32 \quad \text{[A]}$$

よって

$$27a+6b+c=0 \quad \cdots\cdots③$$

$$27a+9b+3c+d=-32 \quad \cdots\cdots④$$

④－②より　$28a+8b+4c=-64$

すなわち　$7a+2b+c=-16$　……⑤

③－①より　$24a+8b=0$

すなわち　$3a+b=0$　……⑥

⑤－①より　$4a+4b=-16$

すなわち　$a+b=-4$　……⑦

⑥，⑦より　$a=2$，$b=-6$

よって，①より　$c=-18$

また，②より　$d=22$

このとき

$$f(x)=2x^3-6x^2-18x+22$$

$$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$$

となり，$f(x)$ の増減表は次のようになるから，

[A]　極値をとるための必要条件
関数 $f(x)$ が $x=\alpha$ で極値をとる
$\Longrightarrow f'(\alpha)=0$
逆に，$f'(\alpha)=0$ であっても，$f(\alpha)$ が極値になるとは限らない。

確かに $x=-1$ で極大値 32，$x=3$ で極小値 -32 をとる。 [B]

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 32	↘	極小 -32	↗

したがって

$$\boldsymbol{a=2,\ b=-6,\ c=-18,\ d=22}$$

[B]　求めた a, b, c, d の値によって，正しい極値をとるかどうか確認する。